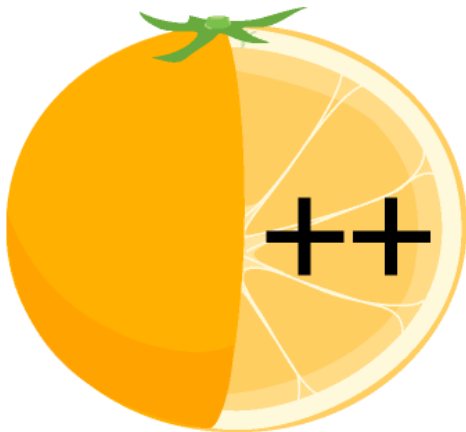


なんとなくわかった気になるフィルタ設計理論

mikanplus

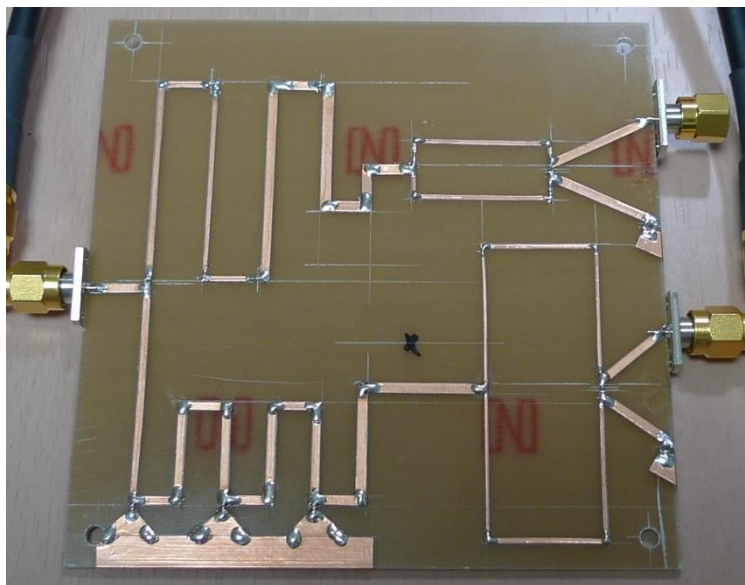
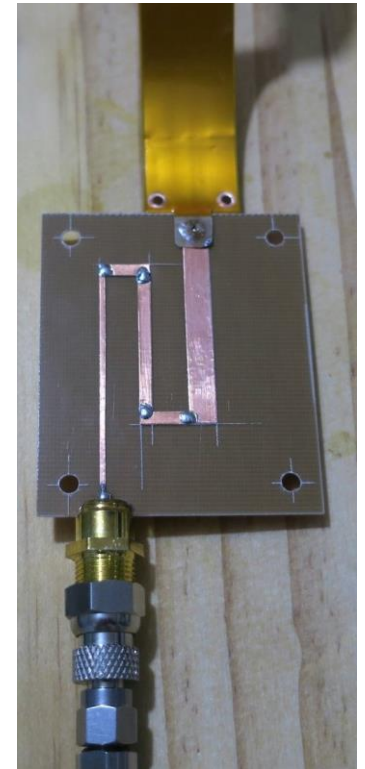
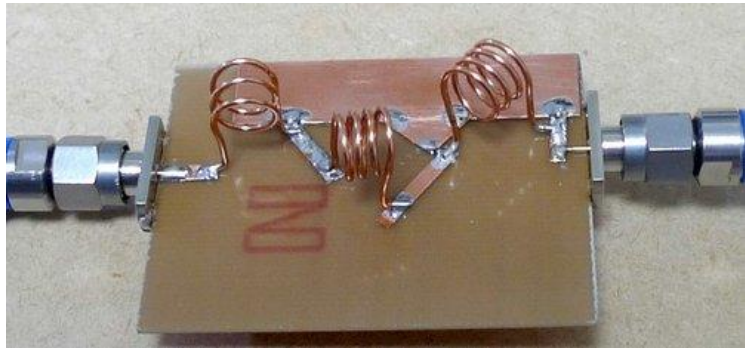
2021-02-20



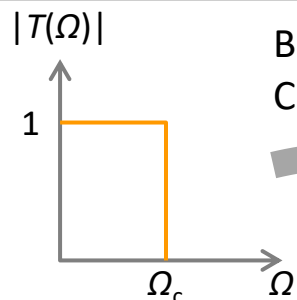
本日のテーマ: 高周波回路(フィルタ)

よくわからない高周波フィルタの設計理論を、できる限りわかりやすく説明したい!

- できる限りあいまいな部分がないようにがんばる
- 時間の関係ですべての式は載せないが要所の途中式はできる限り説明する

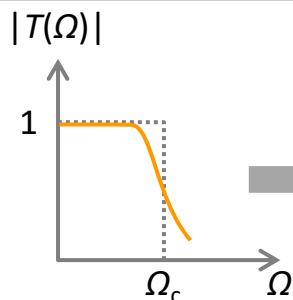


高周波フィルタへの道

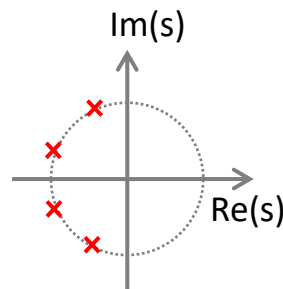


理想LPF

Butterworth
Chebyshev etc.

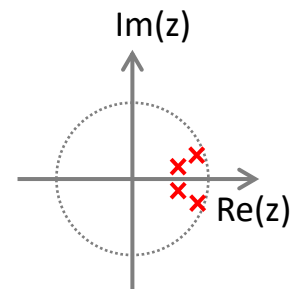


近似LPF



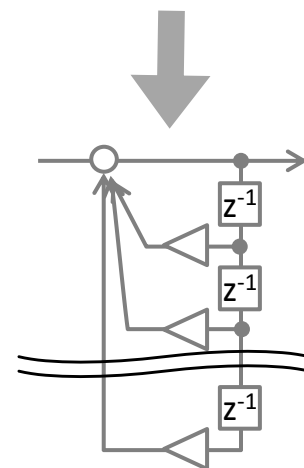
極配置(ラプラス領域)

積分z変換
双1次変換 etc

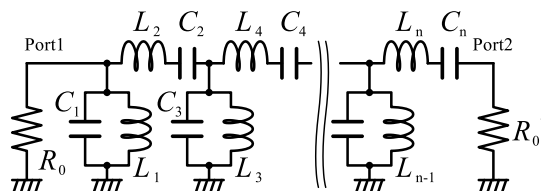


極配置(z領域)

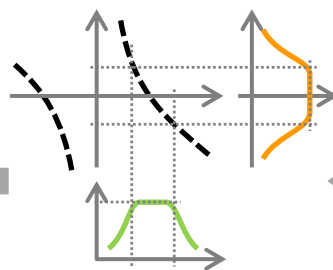
連分数展開



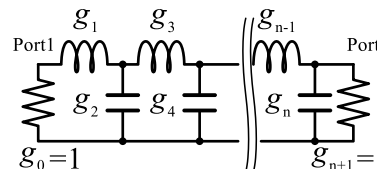
IIRフィルタ



集中定数型BPF

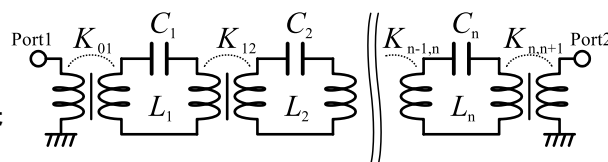


変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$



原型LPF

Kインバータ変換



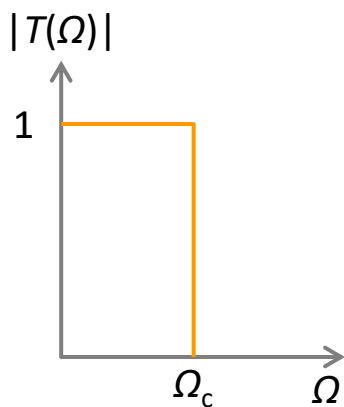
結合共振器型BPF

分布定数化



結合共振器型BPF(分布定数)

理想LPFの近似(Butterworth)



理想LPF

理想LPFの電圧透過係数(S_{21})を定義

$$T(j\Omega) = \begin{cases} e^{-jk\Omega} & 0 \leq |\Omega| \leq 1 \\ 0 & 1 < |\Omega| \end{cases} \quad \leftarrow \text{通過帯域内で線形位相特性}$$



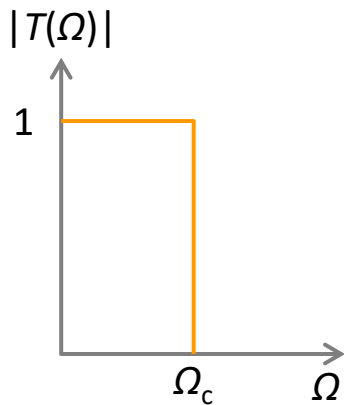
電圧透過係数を2乗して電力透過係数に
通過帯域の特性をテイラー展開

$$|e^{-jx}|^2 = \frac{1}{1 + 2\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \dots\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \dots\right)^2 + \left(x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right)^2}$$

- (1) 2n次の多項式近似
- (2) 2n-1次までの導関数が $\Omega=0$ ですべて0
- (3) Ω に対して単調増加

理想LPFの近似(Butterworth)

理想LPFの電圧透過係数(S_{21})を定義



理想LPF

$$T(j\Omega) = \begin{cases} e^{-jk\Omega} & 0 \leq |\Omega| \leq 1 \\ 0 & 1 < |\Omega| \end{cases} \quad \leftarrow \text{通過帯域内で線形位相特性}$$

↓ 電圧透過係数を2乗して電力透過係数に
通過帯域の特性をテイラー展開

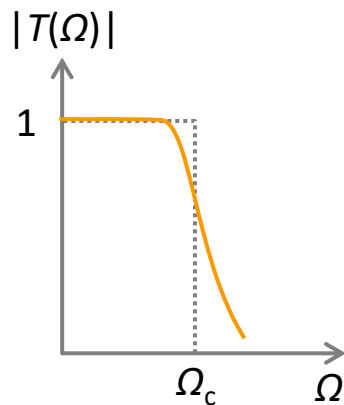
$$|e^{-jx}|^2 = \frac{1}{1 + 2\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \dots\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \dots\right)^2 + \left(x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right)^2}$$

- (1) 2n次の多項式近似
- (2) 2n-1次までの導関数が $\Omega=0$ ですべて0
- (3) Ω に対して単調増加



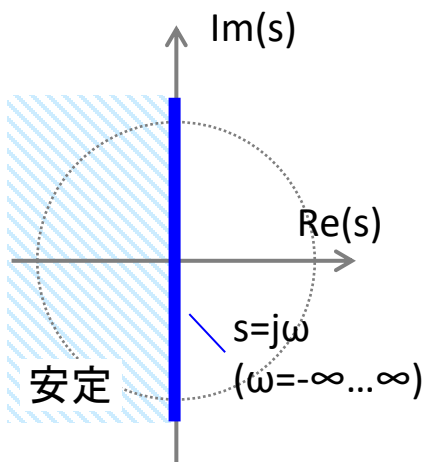
$$|T(j\Omega)|^2 \simeq \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

Butterworth近似した電力透過係数(最大平坦特性)



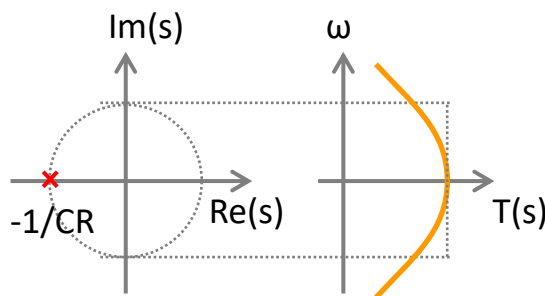
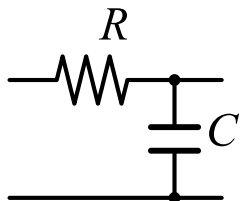
近似LPF

ラプラス平面 (極と零)



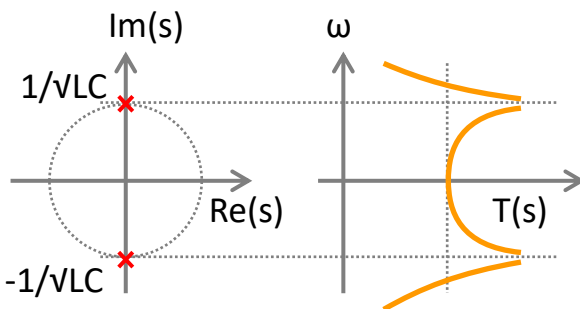
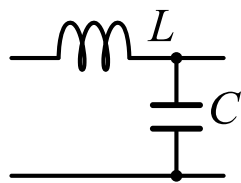
フーリエ変換を複素平面全体に一般化したもの
 周波数 ω を複素周波数 s に拡張
 伝達関数 $T(s)$ について虚軸上をプロットしたものが周波数特性
 ラプラス平面上の極と零は伝達関数 $T(s)$ の特性を決定づける
 →まずは近似LPFの極と零を求める

【1次LPF】



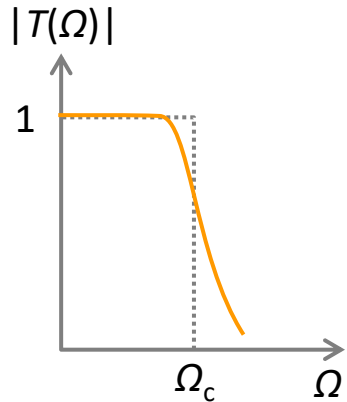
$$T(s) = \frac{1}{1 + sCR} \quad s = -\frac{1}{CR}$$

【2次LPF】



$$T(s) = \frac{1}{1 + s^2LC} \quad s = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Butterworth近似したLPFの極配置



$$|T(j\Omega)|^2 \simeq \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

↓ 周波数 $j\Omega$ を複素周波数 s に拡張 $\Omega = -js$

$$|T(s)|^2 = T(s)T^*(s) \simeq \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

↑ 虚軸上で共役積になるのでOK

Butterworth LPF

Butterworth LPFの極配置を知りたいので $0 = 1 + (-s^2)^n$ の解を求める
 複素数 s を極形式で表す $s = Ae^{jx}$

【 $n=3$ の時】

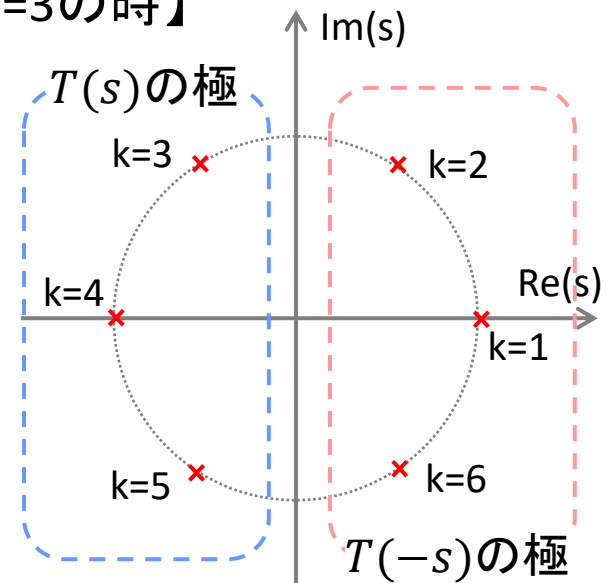
$$-1 = (-A^2 e^{j2x})^n = (-1)^n A^{2n} e^{j2xn}$$

↓ $|(-1)^n A^{2n} e^{j2xn}| = 1$ より $A = 1$

$$-1 = (-e^{j2x})^n = e^{j(2xn+n\pi)}$$

$$e^{j(2k+1)\pi} = (-e^{j2x})^n = e^{j(2xn+n\pi)}$$

$$(2k+1)\pi = 2xn + n\pi \quad x = \frac{2k - n + 1}{2n} \pi \quad (k = 1 \dots 2n)$$



Butterworth近似LPFの回路構造

Butterworth近似LPFの電圧透過係数 $T(s)$ が確定したので回路構造に起こす回路が無損失なら、反射電力 $|\Gamma(s)|^2$ と透過電力 $|T(s)|^2$ の間に次式が成り立つ

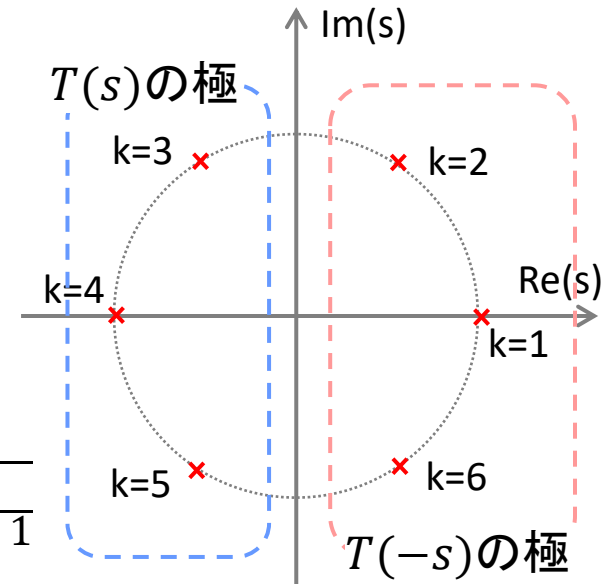
$$|T(s)|^2 \simeq T(s)T(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad |\Gamma(s)|^2 = 1 - |T(s)|^2 \quad Z_{in} = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)}$$

➡ 設計すべき入力インピーダンスが求まる*1

$$|\Gamma(s)|^2 \simeq \Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{-s^6}{1 - s^6}$$

$$= \frac{s^3}{(s+1)(s+e^{j\pi/3})(s+e^{-j\pi/3})} \frac{(-s)^3}{(s-1)(s-e^{j\pi/3})(s-e^{-j\pi/3})}$$

$$\Gamma(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad Z_{in} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}$$



Butterworth近似LPFの回路構造

Butterworth近似LPFの電圧透過係数 $T(s)$ が確定したので回路構造に起こす回路が無損失なら、反射電力 $|\Gamma(s)|^2$ と透過電力 $|T(s)|^2$ の間に次式が成り立つ

$$|T(s)|^2 \simeq T(s)T(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad |\Gamma(s)|^2 = 1 - |T(s)|^2 \quad Z_{in} = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)}$$

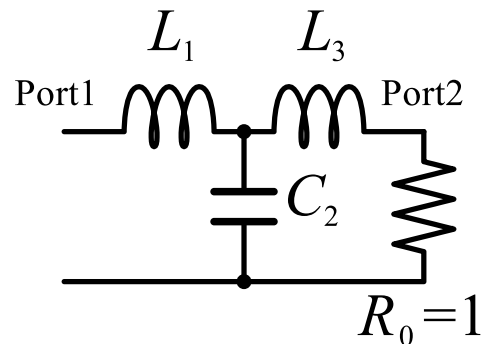
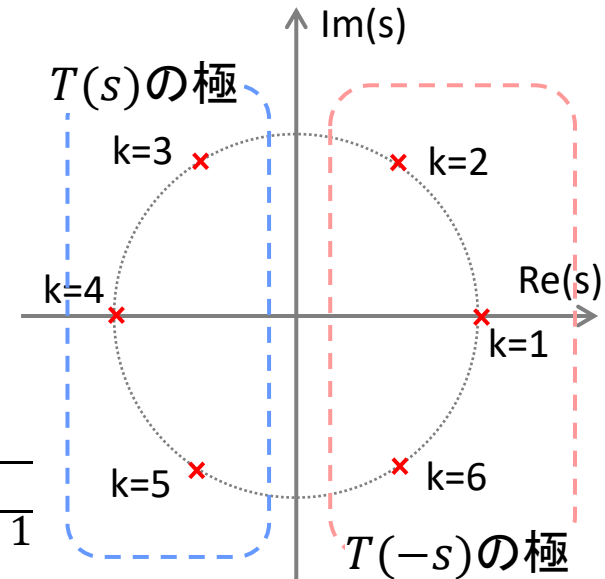
➡ 設計すべき入力インピーダンスが求まる*1

$$|\Gamma(s)|^2 \simeq \Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{-s^6}{1 - s^6}$$

$$= \frac{s^3}{(s+1)(s+e^{j\pi/3})(s+e^{-j\pi/3})} \frac{(-s)^3}{(s-1)(s-e^{j\pi/3})(s-e^{-j\pi/3})}$$

$$\Gamma(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$Z_{in} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s+1}}$$

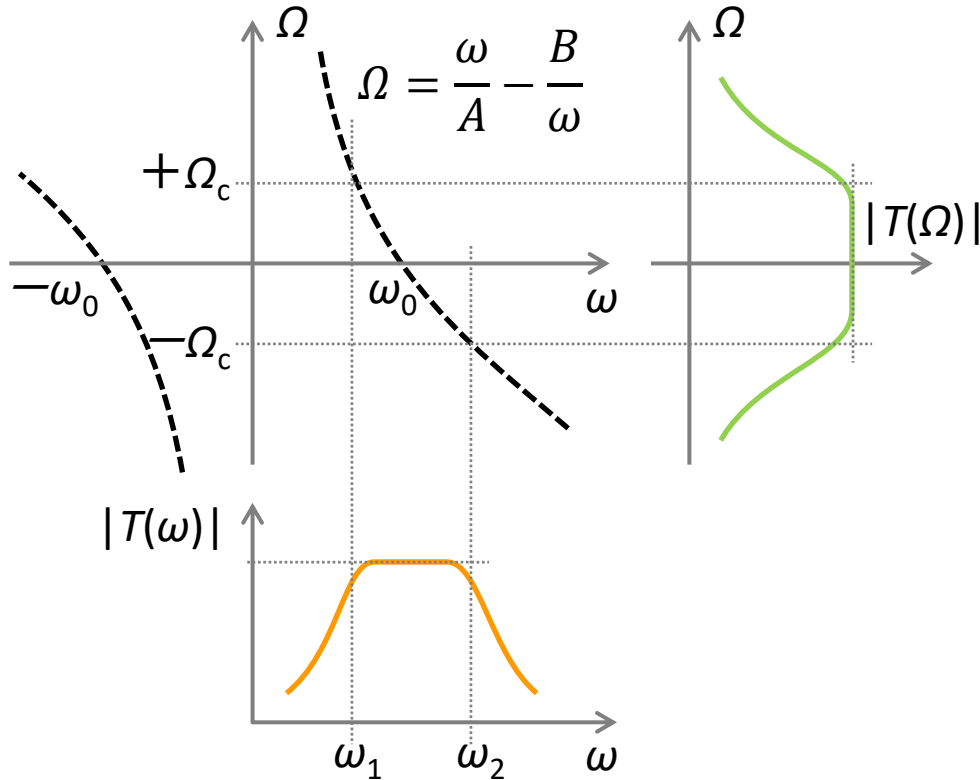


はしご型回路の入力インピーダンスに対応

$$Z_{in} = sL_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{sL_3 + 1}}$$

変数変換によるBPF変換(1)

下図のような変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$ でLPFをBPFに変換したい



■ 拘束条件

$$0 = \frac{\omega_0}{A} - \frac{B}{\omega_0} \quad \Omega_c = \frac{\omega_1}{A} - \frac{B}{\omega_1} \quad -\Omega_c = \frac{\omega_2}{A} - \frac{B}{\omega_2}$$

■ A, Bについて解く

$$A = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c} \quad B = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} + 1 \right) \omega_2 \Omega_c$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{A} - \frac{B}{\omega} = \frac{\Omega_c}{\omega_1 - \omega_2} \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)$$

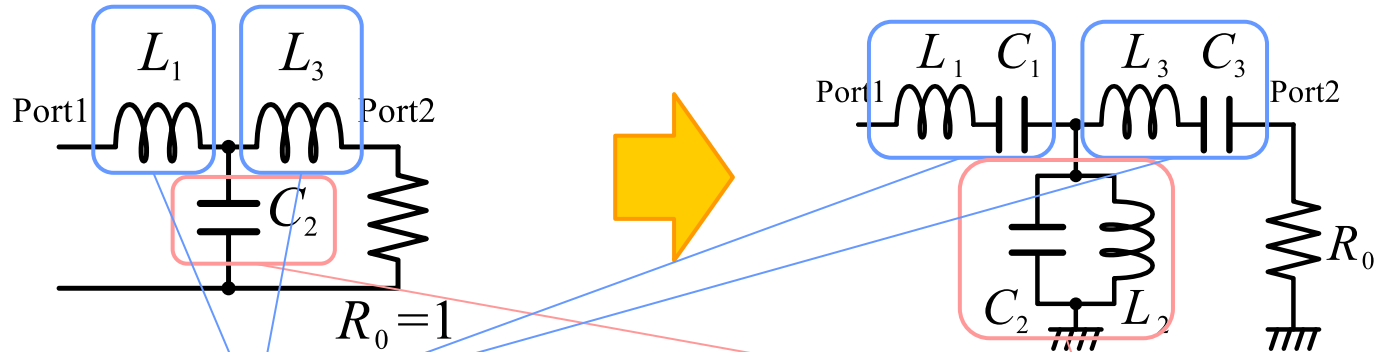
回路要素は変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$ で以下のように変換される

$$j\Omega L' = j\omega \frac{\Omega_c L}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{1}{j\omega \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 L}}$$

$$j\Omega C' = j\omega \frac{\Omega_c C}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{1}{j\omega \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 C}}$$

変数変換によるBPF変換(2)

変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$ によって、インダクタ L は直列LCに、キャパシタ C は並列LCに変換



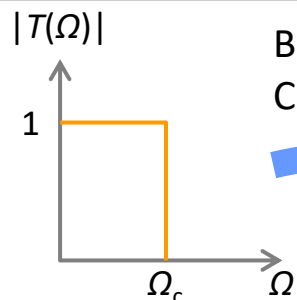
$$j\Omega L' = j\omega \frac{\Omega_c L}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{1}{j\omega \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 L}}$$

$$j\Omega C' = j\omega \frac{\Omega_c C}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{1}{j\omega \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 C}}$$

変数変換後のインダクタ L 、キャパシタ C の各値は以下の通り

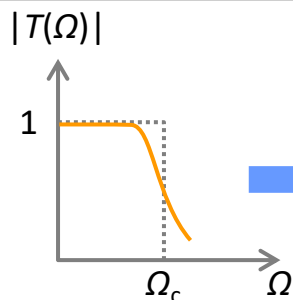
$$L_{\text{BPF}k} = \frac{\Omega_c L_k}{\omega_1 - \omega_2} \quad C_{\text{BPF}k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 L_k} \quad C_{\text{BPF}k} = \frac{\Omega_c C_k}{\omega_1 - \omega_2} \quad L_{\text{BPF}k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_c \omega_0^2 C_k}$$

高周波フィルタへの道

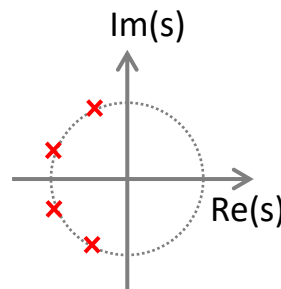


理想LPF

Butterworth
Chebyshev etc.

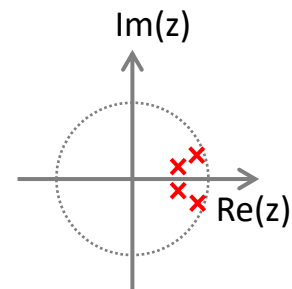


近似LPF



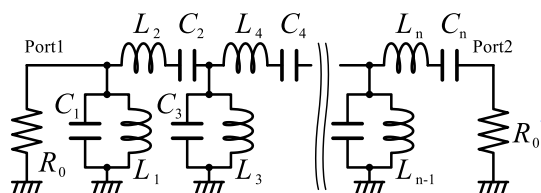
極配置(ラプラス領域)

積分z変換
双1次変換 etc

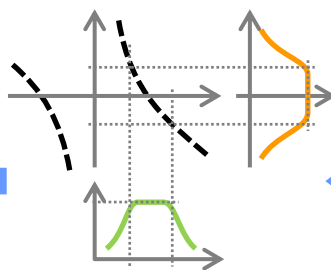


極配置(z領域)

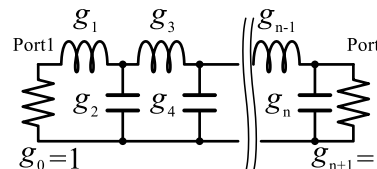
連分数展開



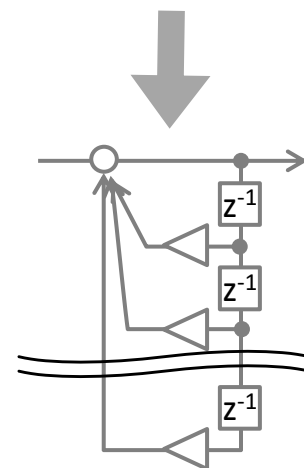
集中定数型BPF



変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$

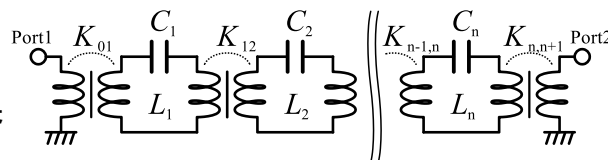


原型LPF



IIRフィルタ

Kインバータ変換



結合共振器型BPF

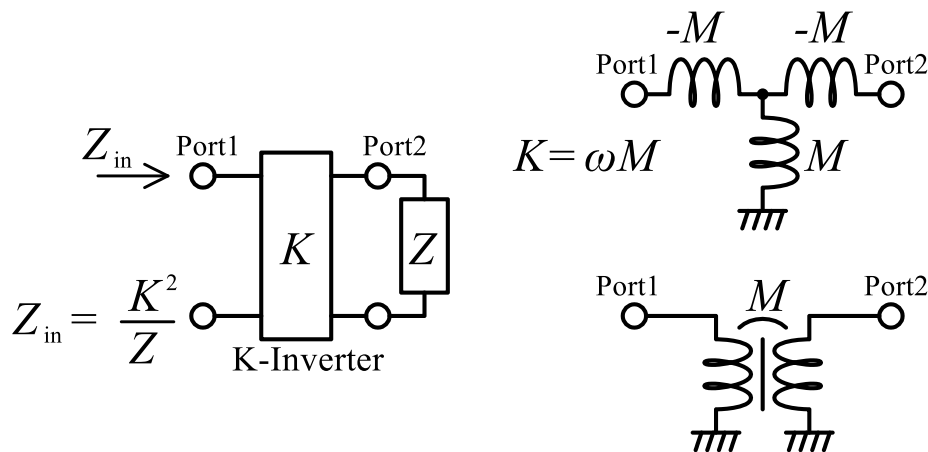
分布定数化



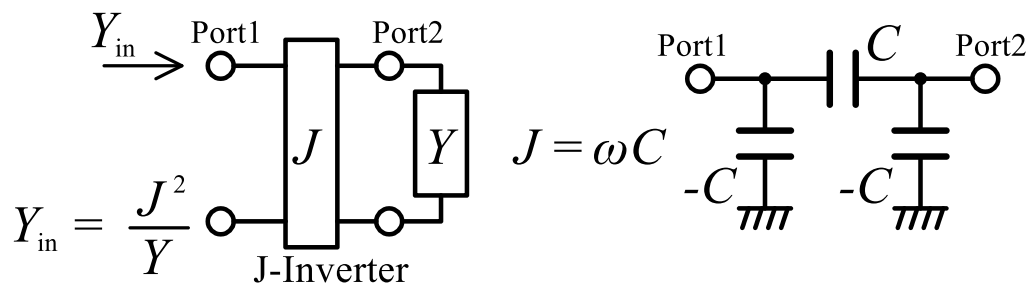
結合共振器型BPF(分布定数)

フィルタ設計理論における「インバータ」

フィルタ設計理論におけるインバータは接続した負荷 Z の入カインピーダンス Z_{in} をその逆数 K^2/Z に変換する回路を指す(Kインバータ)

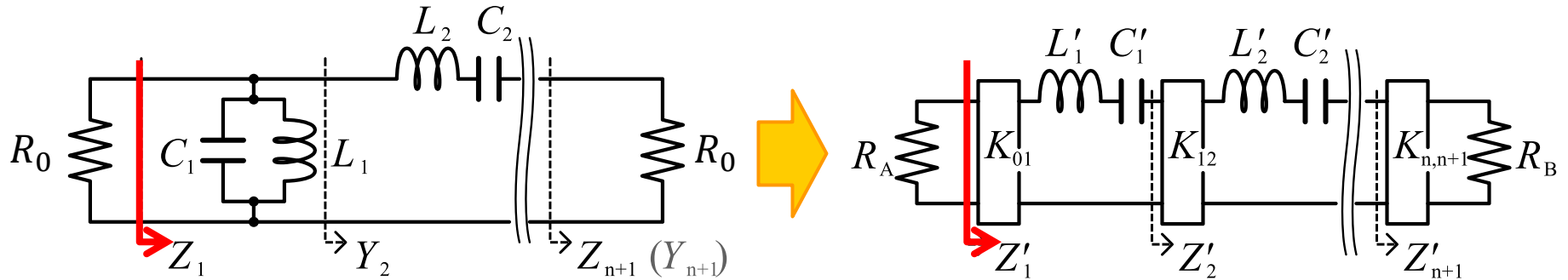


ちなみに接続した負荷 Y の入カアドミタンス Y_{in} をその逆数 J^2/Y に変換する回路はJインバータと呼ばれる



Kインバータによる等価回路変換

変換前後で回路の特性が等価であるためには...



(1) ポート1のインピーダンスで規格化された値と、変換前後の共振周波数が同じ

$$\frac{Z_1}{R_0} = \frac{Z'_1}{R_A} \quad Z_1 = \frac{1}{Y_2 + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}}$$

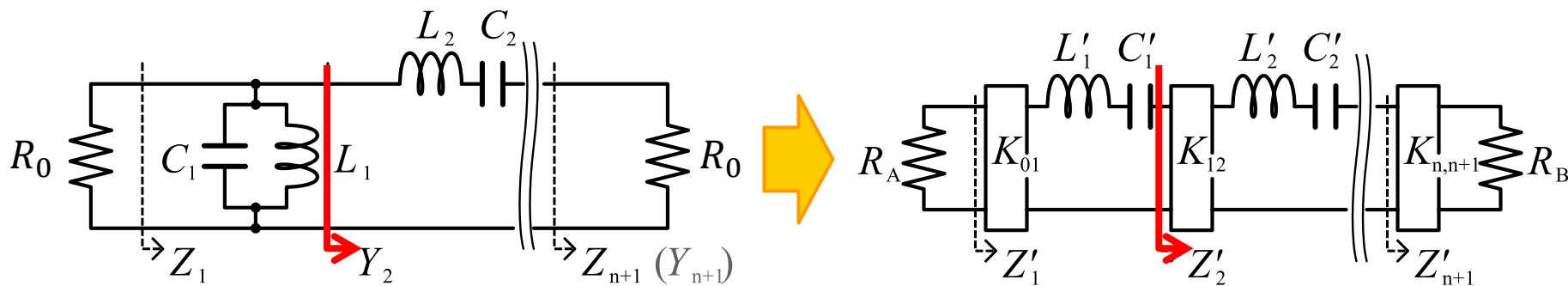
$$Z'_1 = \frac{K_{01}^2}{Z'_2 + j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}}$$

$$\Rightarrow K_{01}^2 = \frac{R_A}{R_0} \frac{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{R_A L_1}{R_0 C'_1}$$

$$Y_2 = Z'_2 \frac{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}}{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}} = Z'_2 \frac{C'_1}{L_1}$$

Kインバータによる等価回路変換

等価回路変換前後で回路の特性が等価であるためには...



(1) ポート1のインピーダンスで規格化された値と、変換前後の共振周波数が同じ

$$\Rightarrow K_{01}^2 = \frac{R_A}{R_0} \frac{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{R_A L_1}{R_0 C'_1}$$

$$Y_2 = Z'_2 \frac{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}}{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}} = Z'_2 \frac{C'_1}{L_1}$$

(2) k=2の時

$$Y_2 = Z'_2 \frac{C'_1}{L_1} \quad Y_2 = \frac{1}{Z_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

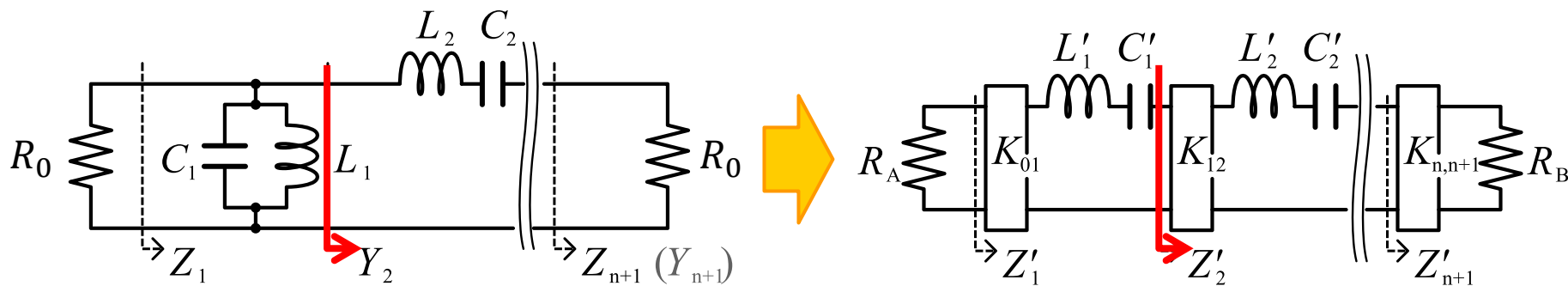
$$Z'_2 = \frac{K_{12}^2}{Z'_3 + j\omega L'_2 + \frac{1}{j\omega C'_2}}$$

$$\Rightarrow K_{12}^2 = \frac{L_1}{C'_1} \frac{j\omega L'_2 + \frac{1}{j\omega C'_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{L_1 L_2}{C'_1 C'_2}$$

$$Z_3 = Z'_3 \frac{L_2}{C'_2 K_{12}^2} = Z'_3 \frac{C'_2}{C_2}$$

Kインバータによる等価回路変換

等価回路変換前後で回路の特性が等価であるためには...



(1) ポート1のインピーダンスで規格化された値と、変換前後の共振周波数が同じ

$$\Rightarrow K_{01}^2 = \frac{R_A}{R_0} \frac{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{R_A L_1}{R_0 C'_1}$$

$$Y_2 = Z'_2 \frac{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}}{j\omega L'_1 + \frac{1}{j\omega C'_1}} = Z'_2 \frac{C'_1}{L_1}$$

(2) k=2の時

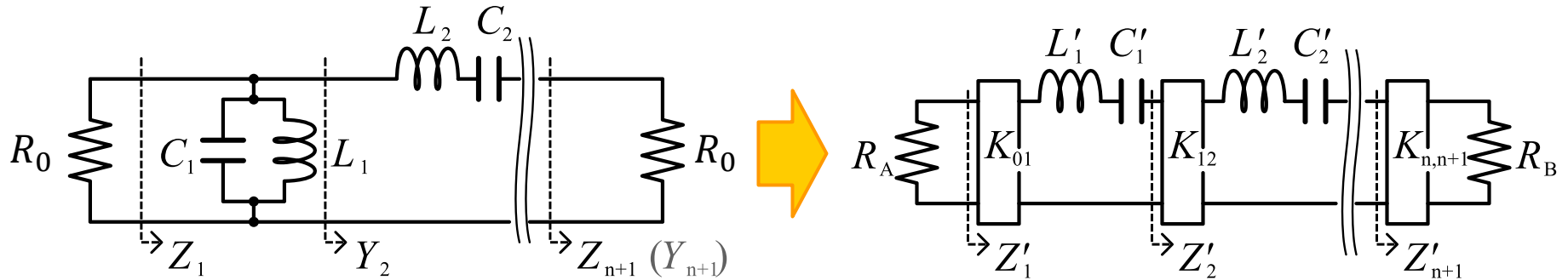
$$\Rightarrow K_{12}^2 = \frac{L_1}{C'_1} \frac{j\omega L'_2 + \frac{1}{j\omega C'_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{L_1 L_2}{C'_1 C'_2}$$

$$Z_3 = Z'_3 \frac{L_2}{C'_2 K_{12}^2} = Z'_3 \frac{C'_2}{C_2}$$

こんな感じで順番に解いていくとすべてのKインバータ値が求まる

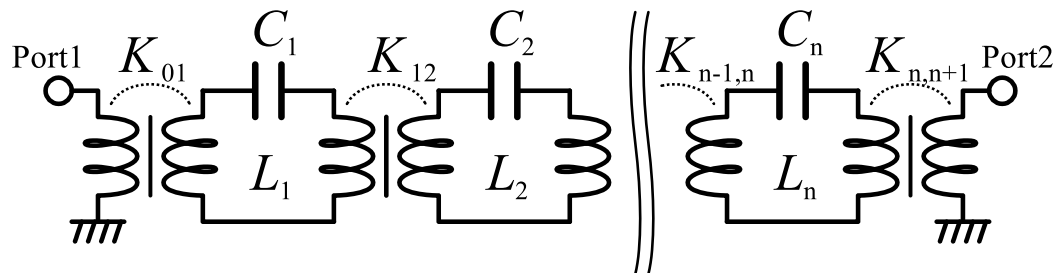
Kインバータによる等価回路変換

等価回路変換前後で回路の特性が等価であるためには...



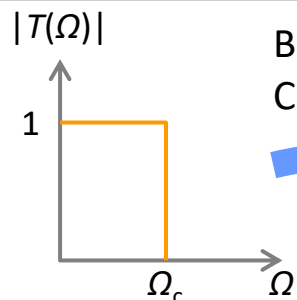
$$K_{01} = \sqrt{\frac{R_A L_1}{R_0 C'_1}} \quad K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L_{i-1} C_i}{C'_{i-1} C'_i}} \quad (i = \text{even}) \quad K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{C_{i-1} L_i}{C'_{i-1} C'_i}} \quad (i = \text{odd})$$

さらに相互インダクタンスMは、Kインバータとして機能するので...



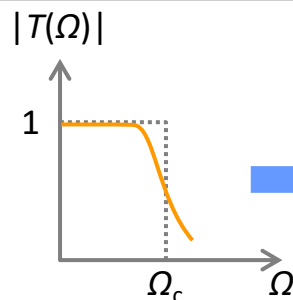
結合共振器型BPF

高周波フィルタへの道

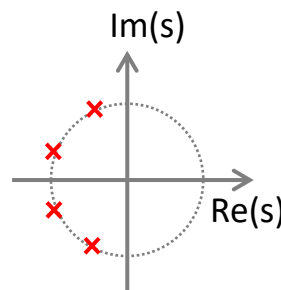


理想LPF

Butterworth
Chebyshev etc.

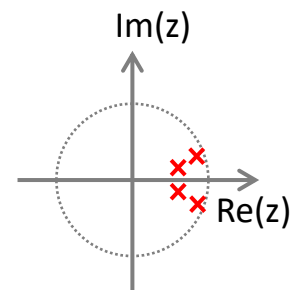


近似LPF



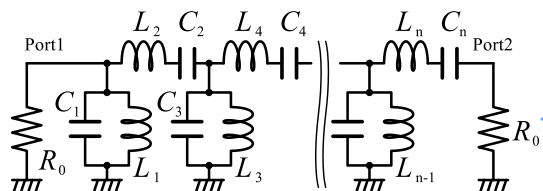
極配置(ラプラス領域)

積分z変換
双1次変換 etc

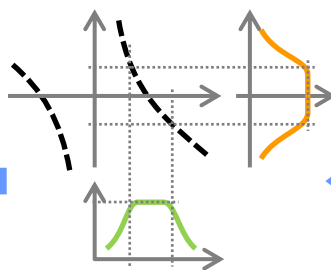


極配置(z領域)

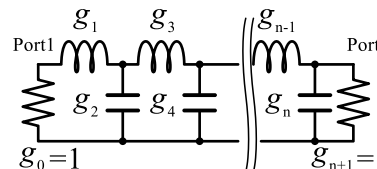
連分数展開



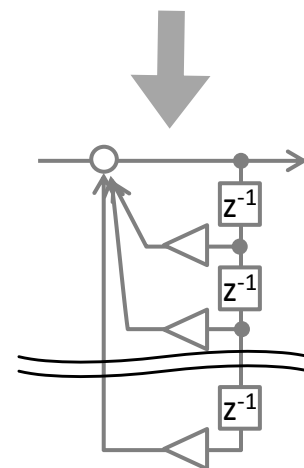
集中定数型BPF



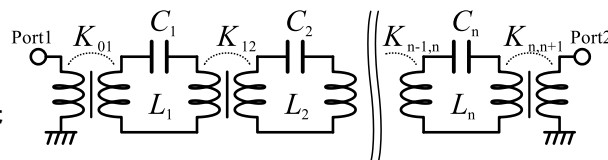
変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$



原型LPF



Kインバータ変換



結合共振器型BPF

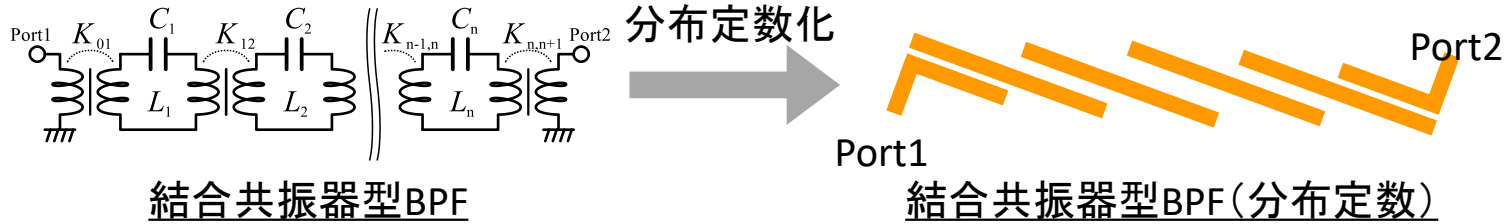
分布定数化



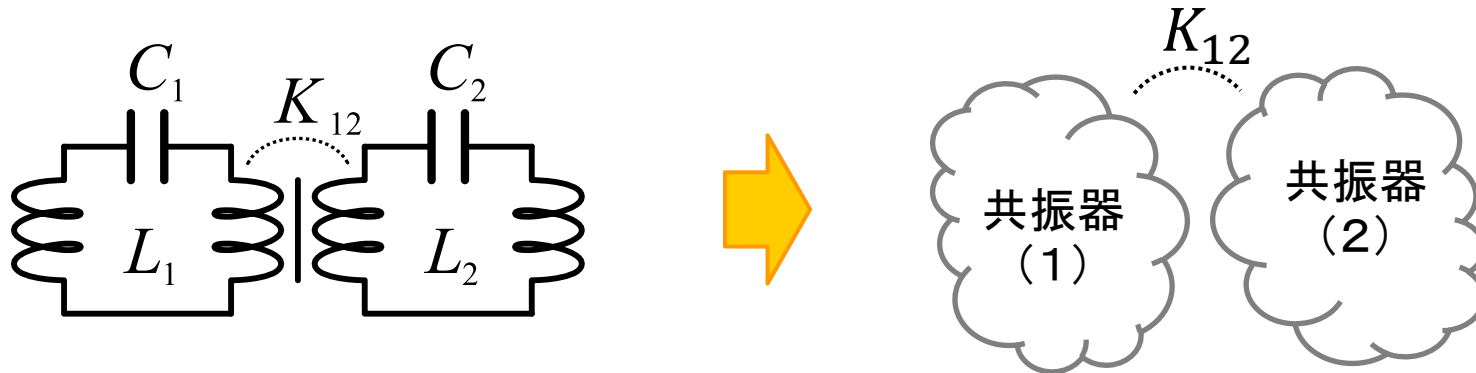
結合共振器型BPF(分布定数)

共振とは

なんとなく1対1対応してそうだけど...



結合したLC共振回路をより抽象度の高い表現にしたい



まずは共振の定義に立ち返る→自由振動解※

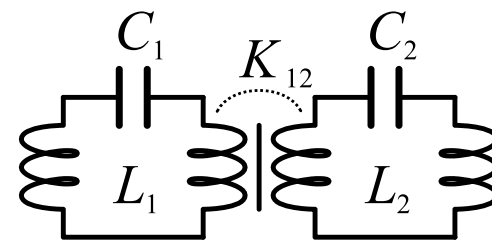
※自由振動解は何も入力をしない状態(ポートオープン)での固有振動

LC共振回路の自由振動解

まずはLC共振回路の自由振動解を求めてみる

$$0 = \frac{L_1 C_1}{M} \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{M} \int v_1 dt$$

$$0 = \frac{L_2 C_2}{M} \frac{dv_2}{dt} + C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{M} \int v_2 dt$$



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

【行列表現】

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{L_1 L_2 - M} \begin{pmatrix} -\frac{L_2}{C_1} & \frac{M}{C_1} \\ \frac{M}{C_2} & -\frac{L_1}{C_2} \end{pmatrix}$$

変換行列 T で A を対角化すると、独立する2つの2階同次線形微分方程式になる
対角行列 X の対角要素 λ_1, λ_2 は固有方程式 $0 = \det(A - \lambda_i I)$ を解くことで得る

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{V} = \mathbf{X} \mathbf{V} \quad \mathbf{X} = T^{-1} \mathbf{A} T \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

結合度として知られてる

自由振動解は

$$V_i = B_i \exp(j\sqrt{-\lambda_i} t) \quad \lambda_i = \frac{-\omega_1^2 - \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - k^2)}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

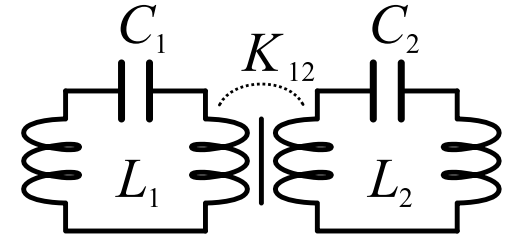
LC共振回路の自由振動解

LC共振回路の自由振動解

$\sqrt{-\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}$ は結合状態での共振角周波数を表す

$$V_i = B_i \exp(j\sqrt{-\lambda_i}t)$$

$$\lambda_i = \frac{-\omega_1^2 - \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - k^2)} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$



共振回路の共振角周波数がどちらも ω_0 だとすると

$$\lambda_i = \frac{-\omega_0^2 \pm k\omega_0^2}{1 - k^2}$$



結合するとともに ω_0 だけだった共振周波数が
2つの共振周波数 $\sqrt{-\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}$ を持つようになる！

$\omega_{\lambda_1} = \sqrt{-\lambda_1}, \omega_{\lambda_2} = \sqrt{-\lambda_2}$ とおいて、結合度 k を ω_{λ_1} と ω_{λ_2} で表すと

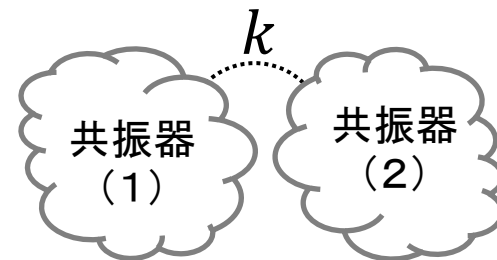
LC共振回路の自由振動解

LC共振回路の自由振動解

$\sqrt{-\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}$ は結合状態での共振角周波数を表す

$$V_i = B_i \exp(j\sqrt{-\lambda_i}t)$$

$$\lambda_i = \frac{-\omega_1^2 - \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - k^2)} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$



共振回路の共振角周波数がどちらも ω_0 だとすると

$$\lambda_i = \frac{-\omega_0^2 \pm k\omega_0^2}{1 - k^2}$$



結合するとともに ω_0 だけだった共振周波数が2つの共振周波数 $\sqrt{-\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}$ を持つようになる

$\omega_{\lambda_1} = \sqrt{-\lambda_1}, \omega_{\lambda_2} = \sqrt{-\lambda_2}$ とにおいて、結合度 k を ω_{λ_1} と ω_{λ_2} で表すと

$$k = \frac{\omega_{\lambda_1}^2 - \omega_{\lambda_2}^2}{\omega_{\lambda_1}^2 + \omega_{\lambda_2}^2}$$

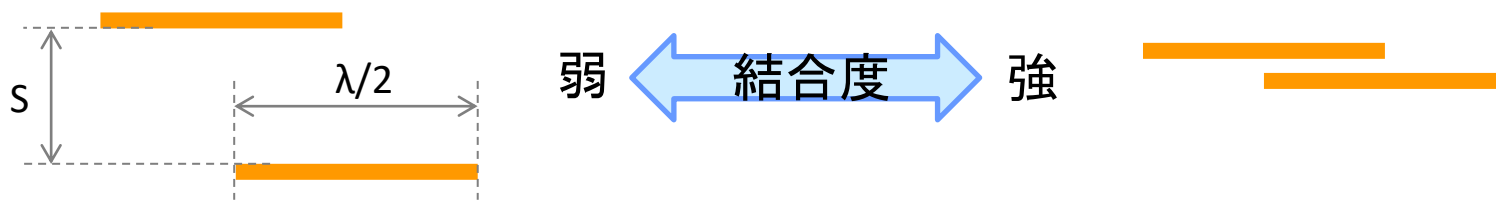
結合度 k は結合状態の共振周波数(固有値)のみで表される

自由振動解を2つ持つ構造は結合共振器として機能する可能性がある！

結合共振器として働く構造(1)

■ 基板上の $\lambda/2$ 波長のパターン

結合共振器として働きます。間隔 s を近づけると強い結合が得られます

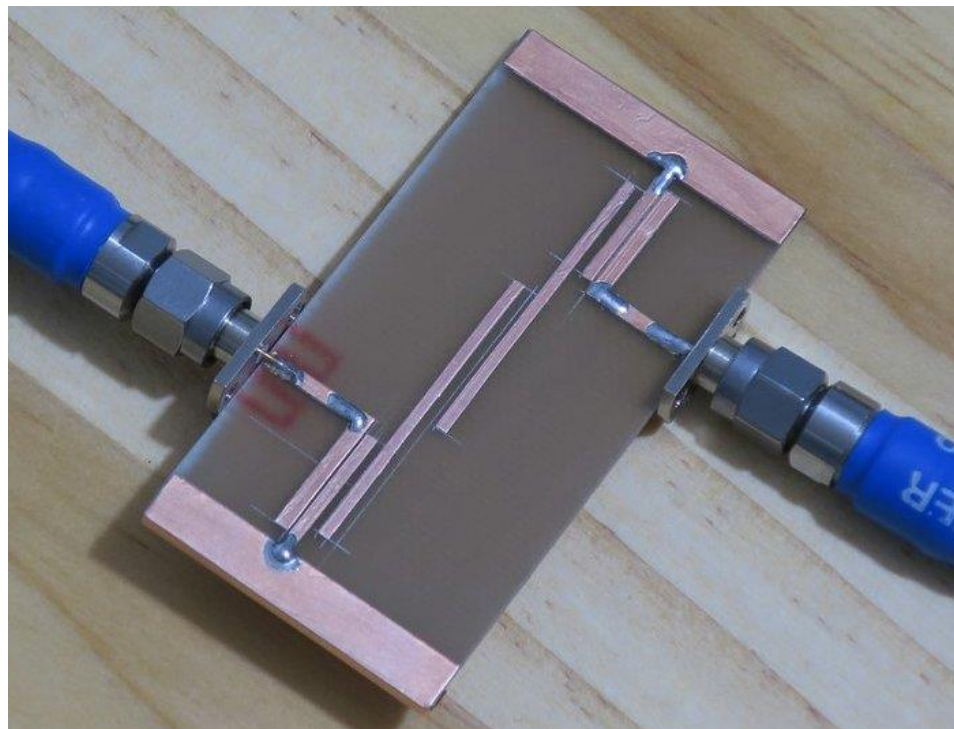


■ フィルタの例

自作2.7GHz帯バンドパスフィルタ

平行結合型4段BPF

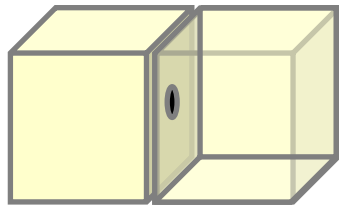
1段目と4段目には $\lambda/4$ 共振器を使用



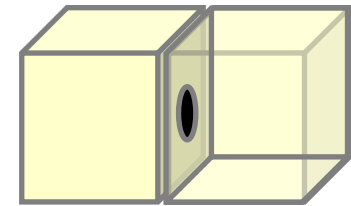
結合共振器として働く構造(2)

■ 穴でつながった2つの導体の空洞(空洞共振器)

結合共振器として働きます。穴の大きさや位置で結合度を調整できます。損失が少なく、とても急峻なフィルタが作れる反面、大きくて重い。

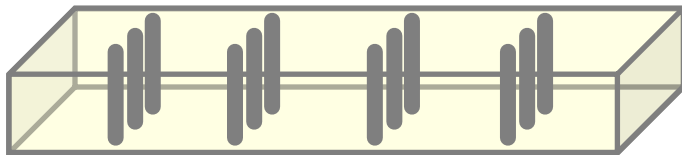


弱 ← 結合度 → 強



■ フィルタの例

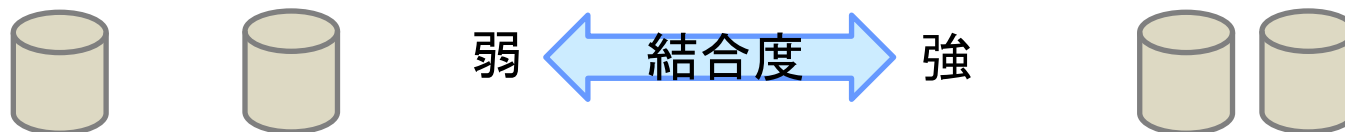
穴の代わりにフェンスを使った
導波管フィルタ



結合共振器として働く構造(3)

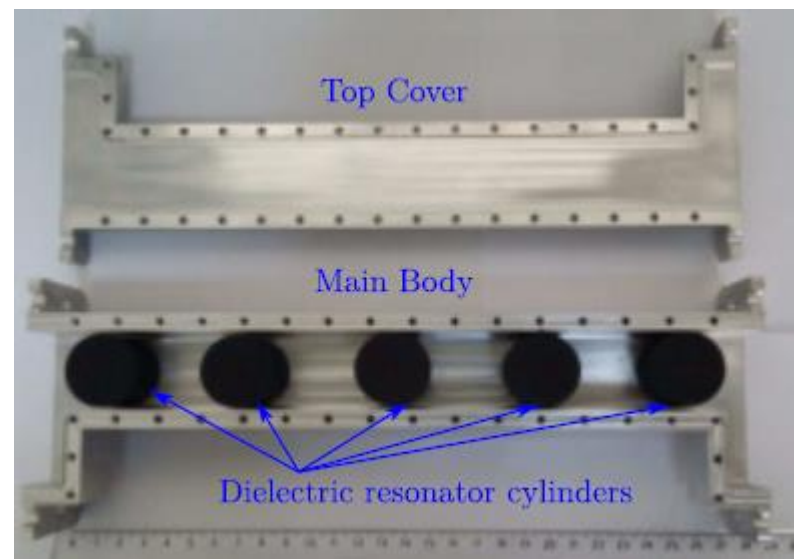
■ セラミックなどの誘電体のかたまり(誘電体共振器)

結合共振器として働きます。誘電体間の距離や位置で結合度を調整できます。そこそこ損失が少なく、空洞共振器型と比較して小型に作れます。

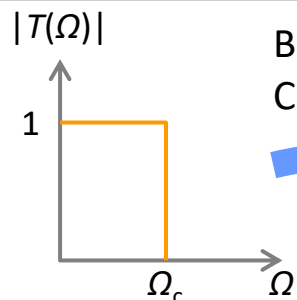


■ フィルタの例

導波管内部に誘電体柱を配置したフィルタ
その他、空洞共振器内部に配置して、
共振器を小型化する用途に使われたりする

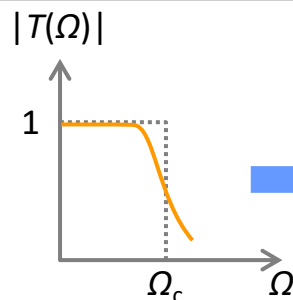


高周波フィルタへの道

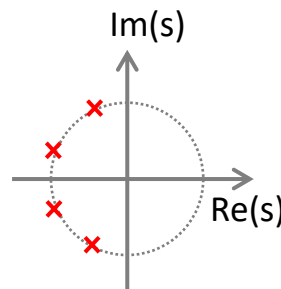


理想LPF

Butterworth
Chebyshev etc.

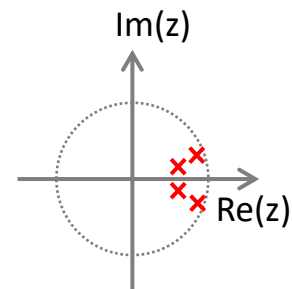


近似LPF



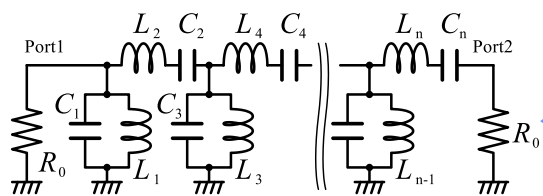
極配置(ラプラス領域)

積分z変換
双1次変換 etc

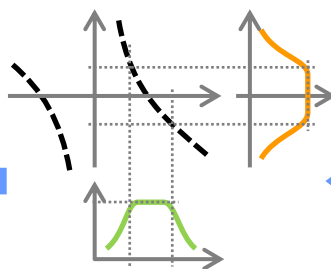


極配置(z領域)

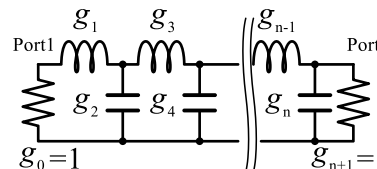
連分数展開



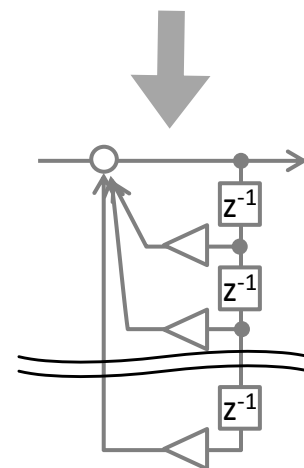
集中定数型BPF



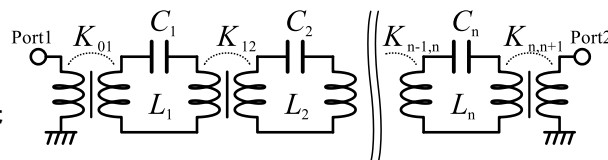
変数変換 $\Omega \rightarrow \omega$



原型LPF



Kインバータ変換



結合共振器型BPF

分布定数化



結合共振器型BPF(分布定数)

おしまい

